

CALCUL DES COQUES MINCES A SYMETRIE DE REVOLUTION

Par

Mohamed KHAOUA

Maître de Recherche au C.G.S. (Alger)

Enseignant Associé à l'ENTP

Résumé

La méthode de calcul des coques minces à symétrie de révolution, exposée dans le présent article, se distingue des méthodes classiques exposées dans la littérature par le recours à l'analyse tensorielle. La démarche consiste à construire un repère curviligne intrinsèque approprié à la forme de la coque envisagée, y évaluer les grandeurs vectorielles et tensorielles et y écrire les équations issues de la théorie de l'élasticité, prenant en compte simultanément les déformations de membrane et de flexion.

Ainsi, les déplacements, tenseurs des déformations et des contraintes sont exprimés dans le repère curviligne. Il en est de même des équations d'équilibre, des conditions aux limites et de l'expression des efforts.

Deux méthodes de résolution sont proposées dans le cas d'une coque sphérique. Il est possible d'étendre la démarche à d'autres formes de coques et, plus généralement, à des coques de courbure, épaisseur et charges variables.

Il est, enfin, envisageable de construire la matrice de rigidité d'un élément de coque et d'insérer ce dernier dans un programme d'éléments finis.

Mots clés : coque de révolution - normale - tangente - courbure - parallèle - méridienne - membrane - flexion.

1 INTRODUCTION

La présente étude a pour objet de présenter une méthode de calcul des coques minces à symétrie de révolution et de déduire leur comportement sous l'effet des efforts de membrane ainsi que des efforts de flexion.

La démarche suivie consiste, d'abord, à élaborer des règles de calcul propres à ce type de structures, compte tenu de leurs formes géométriques, puis d'appliquer, moyennant l'introduction de notions appropriées, les lois de la mécanique, notamment celles de l'élasticité et, enfin de proposer des méthodes de résolution des équations qui en résulteront.

Le type de structures dont nous envisageons l'analyse et leur forme particulière nécessite le recours à l'analyse tensorielle, instrument indispensable, dès qu'il s'agit d'évoluer dans des espaces courbes. Enfin, et bien que nous nous emploierons à simplifier les équations, l'application à des cas de coques, autres que sphériques, d'épaisseur et de charge variables, nécessite la mise en oeuvre de méthodes numériques.

2 GEOMETRIE DES SURFACES DE REVOLUTION

2.1 Définition

Une surface de révolution est une figure générée par une courbe, la génératrice, qui s'appuie sur un cercle, la directrice, ou cercle directeur, tout en tournant autour de l'axe de ce cercle. L'ensemble des courbes génératrices sont appelées *méridiennes*, les cercles parallèles à la directrice sont appelés *parallèles*.

L'étude du comportement des coques, en général, se fera dans un système d'axes de coordonnées intrinsèques dont nous commençons par indiquer le mode de construction.

2.2 Système de coordonnées intrinsèques

a) Surface de révolution

L'équation d'une surface de révolution, rapportée à un système d'axes de coordonnées cartésiennes Oxyz, est de la forme :

$$x^2 + y^2 = f^2(z) \quad (1)$$

Le système de coordonnées utilisé, dans l'analyse des coques, est un système trirectangle dont les axes sont, respectivement, dirigés suivant la normale extérieure à la surface et les tangentes respectives, à la

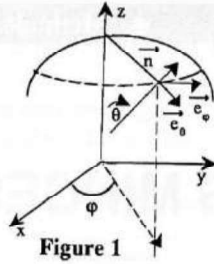


Figure 1

parallèle et à la méridienne. Si un tel système existe, il définit une transformation de coordonnées permettant le passage de l'ancien repère (x, y, z) , x^i en notations tensorielles, au nouveau repère (φ, θ) , ou α^i .

Recherchons un tel système de telle sorte que soit vérifiée l'équation (1). Cette dernière peut se mettre sous la forme :

$$\phi = x^2 + y^2 - f^2(z) = 0$$

On sait que $\vec{N} = \text{grad } \phi$ est un vecteur normal à la surface dont les composantes sont :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2ff' \end{pmatrix}$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface est, alors, égal à $\vec{N}$ que divise son module :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

où

$$|\vec{N}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + f^2 f'^2}$$

Compte tenu de (1),

$$|\vec{N}| = 2f\sqrt{1 + f'^2}$$

De ce fait,

$$|\vec{n}| = \frac{1}{|\vec{N}|} \begin{cases} 2x = \alpha \\ 2y = \beta \\ -2ff' = \gamma \end{cases} \quad (2a)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (2b)$$

Des relations (2a) on déduit que :

$$\gamma^2 = \frac{f'^2}{1 + f'^2}$$

ou

$$f'^2 = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad (2c)$$

Posons, par ailleurs, $\beta = \alpha \cdot \tan \varphi$, il résulte de (2b) :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1 - \gamma^2 \cos^2 \varphi \\ \alpha^2 &= 1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi \\ \gamma^2 &= \gamma^2 \end{aligned} \quad (2d)$$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface s'expriment, en vertu de (2c), en fonction de la seule composante γ , donc de $f'(z)$.

Les relations (2a) indiquent le passage du système de coordonnées caractéristiques aux coordonnées intrinsèques.

Explicitement cette opération se traduit par les relations :

$$\begin{aligned} x &= f(z) \cos \varphi \\ y &= f(z) \sin \varphi \\ z &= z(f) \end{aligned} \quad (3)$$

Les composantes des vecteurs de base du nouveau repère, tangents, respectivement, à la parallèle et à la méridienne, sont :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(z) \cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(z) \sin \varphi) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \\ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} f(z) \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La condition d'orthogonalité du système exige que le produit scalaire des vecteurs de base, pris deux à deux, soit nul. En particulier,

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

Cette condition est satisfaite si $f(z)$ est fonction de θ seul ; par conséquent, il en est de même pour z et γ .

Il est commode de poser par la suite :

$$\gamma = \cos \theta$$

Il en découle, compte tenu de (2c)

$$f' = \cotg \theta$$

Les composantes de $\vec{n}$ sont, alors, d'après (2a) et (2d) :

$$\alpha = \sin \theta \cdot \cos \varphi \quad \beta = \sin \theta \cdot \sin \varphi \quad \gamma = \cos \theta \quad (4)$$

▲ Application à la sphère :

Dans le cas d'une surface sphérique, de rayon R

$$\begin{aligned} f^2 &= R^2 - z^2 \\ f' &= \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} = -\cotg \theta \end{aligned}$$

$$z = R \cdot \cos \theta$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ y &= R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ z &= R \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

b) Coque de révolution

Une coque de révolution est un corps volumique généré par une surface de révolution dont chaque point se déplace le long de la normale sur une distance h appelée épaisseur.

L'épaisseur h peut être petite ou grande par rapport au rayon de courbure ; on est alors en présence d'une coque mince ou d'une coque épaisse. En outre, l'épaisseur h peut être constante ou variable.

Pour construire un système de coordonnées intrinsèques à une coque, nous envisageons un repère mobile d'origine O , située sur la surface moyenne, dont les axes sont dirigés, respectivement, suivant les courbes parallèles et méridiennes et suivant la normale extérieure à la surface moyenne.

On mesure au point O les coordonnées (φ, θ) et on compte, à partir du même point, la coordonnée t d'un point courant M , mesurée suivant la normale à la surface moyenne.

Nous conviendrons que le trièdre est direct dans le sens $(\vec{e}_\varphi, \vec{n}, \vec{e}_\theta)$.

Compte tenu de cette convention, un rayon vecteur $\vec{r} = \vec{O'M}$, repéré à partir d'une origine arbitraire O' , se décompose comme suit :

$$\vec{r} = \vec{r}^o + \vec{\rho}$$

où $\vec{r}^o = \vec{O'O}$ est le rayon vecteur d'un point O pris sur la surface moyenne et $\vec{\rho} = \vec{OM}$ est pris suivant l'épaisseur de la coque dans la direction de la normale ; comme $\vec{\rho} = \vec{n} \cdot t$, l'expression de $\vec{r}$ s'écrit :

$$\vec{r} = \vec{r}^o + t \cdot \vec{n} \quad (6)$$

Les grandeurs affectées de l'indice $(^o)$ se rapportent à la surface moyenne. Connaissant les composantes de $\vec{r}^o$ et de $\vec{n}$, il est aisé d'écrire, pour la coque, les composantes de $\vec{r}$, donc les relations de passage du système de coordonnées cartésiennes aux coordonnées intrinsèques. Par exemple, pour une coque sphérique le passage se traduit par :

$$\begin{aligned} x &= (R+t) \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= (R+t) \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z &= (R+t) \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

L'expression des vecteurs de base d'un tel système se déduit de (6), par dérivation du vecteur $\vec{r}$:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial \vec{r}^o}{\partial \alpha^i} + t \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i}$$

et, en définitive :

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i^o + t \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i} \quad (8)$$

Le tenseur métrique fondamental, se réduit à ses composantes diagonales en raison de l'orthogonalité des axes de coordonnées ; ces composantes sont :

$$g_{\varphi\varphi} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \quad g_{tt} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t$$

Appliquées à l'exemple de la coque sphérique, ces relations donnent :

$$g_{\varphi\varphi} = (R+t)^2 \cdot \sin^2 \theta \quad g_{\theta\theta} = (R+t)^2 \quad g_{tt} = 1 \quad (9a)$$

Sur la surface moyenne ($t=0$), le tenseur métrique fondamental se réduit à :

$$g_{\varphi\varphi}^o = R^2 \cdot \sin^2 \theta \quad g_{\theta\theta}^o = R^2 \quad g_{tt}^o = 1 \quad (9b)$$

c) Courbure d'une surface

La courbure, ou son inverse le rayon de courbure, est une caractéristique essentielle des coques. Nous exposons, ci-après, une méthode pratique pour sa détermination.

La géométrie différentielle nous enseigne que la courbure d'une figure géométrique est donnée par la relation :

$$\mu \cdot \vec{n} = - \frac{d^2 \vec{r}}{dl^2} \quad (10a)$$

dans le cas qui nous intéresse $\vec{r}$ est le rayon vecteur de coordonnées (φ, θ) et dl la longueur de ar . Exécutons la double dérivation par rapport aux coordonnées α^i et α^j ,

$$\mu \cdot \vec{n} = - \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} \cdot \frac{d\alpha^i}{dl} \frac{d\alpha^j}{dl} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{d^2 \alpha^i}{dl^2} \quad (10b)$$

Remarquons que :

$$dl^2 = g_{ij} \cdot d\alpha^i \cdot d\alpha^j$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} = \vec{e}_k \cdot \Gamma_{ij}^k$$

Γ_{ij}^k est le symbole de Christoffel de 2^e espèce du système de coordonnées. Multiplions scalairement les deux membres de (10b) par $\vec{n}$, et remarquons que $\vec{n} \cdot \vec{e}_k = \delta_{kt}$, δ_{kt} étant le symbole de Kronecker ($\delta_{kt} = 1$ si $k=t$ et $\delta_{kt} = 0$ si $k \neq t$) d'une part, et que le deuxième terme du second membre de (10a) disparaît comme produit scalaire de deux

vecteurs orthogonaux, d'autre part, on obtient la relation :

$$(\mu \cdot g_{ij} + \Gamma_{ij}^i) d\alpha^i \cdot d\alpha^j = 0$$

Cette relation est vérifiée si est vérifié le système d'équations linéaires :

$$(\mu \cdot g_{ij} + \Gamma_{ij}^i) d\alpha^i = 0$$

dont les $d\alpha^i$ sont les inconnues. On sait que pour qu'il existe une solution, non nulle, de ce système d'équations il faut que le déterminant de la matrice des coefficients des inconnues soit nul. On remarquera, par ailleurs, que cette matrice se réduit à une diagonale car les termes pour lesquels i et j sont différents sont nuls, et on déduit :

$$\mu_i = - \frac{1}{g_{ii}} \cdot \Gamma_{ii}^i = \Gamma_{it}^i$$

sachant que :

$$\Gamma_{ii}^i = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{g_{ii} \partial t}$$

l'expression de la courbure d'une surface de révolution est :

$$\mu_i = 1/R_i = \Gamma_{it}^i$$

Les coques repérées par deux coordonnées angulaires possèdent deux rayons de courbure. Ainsi, pour la coque sphérique, les courbures sont :

$$\mu_\varphi = \frac{1}{R+t} \quad \mu_\theta = \frac{1}{R+t}$$

qui se ramènent, sur la surface moyenne ($t=0$), à :

$$\mu_\varphi = \mu_\theta = \frac{1}{R}$$

Remarquons que pour une sphère les deux rayons de courbure sont égaux. Si la coque a la forme d'un parabolôïde de révolution d'équation :

$$x^2 + y^2 = -2pz$$

on arriverait par un raisonnement similaire aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= (p \cdot \operatorname{tg} \theta + t \cdot \sin \theta) \cdot \cos \varphi \\ y &= (p \cdot \operatorname{tg} \theta + t \cdot \sin \theta) \cdot \sin \varphi \\ z &= -p \cdot \operatorname{tg}^2 \theta + t \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

On peut déduire aisément les composantes des vecteurs de base, ainsi que le tenseur métrique fondamental. Les rayons de courbure ont, alors, pour expression :

$$R_\varphi = \frac{p}{\cos \theta} \quad R_\theta = \frac{p}{\cos^3 \theta}$$

On peut déduire des considérations qui précèdent l'expression du tenseur métrique fondamental et de sa racine carrée au point M, en fonction de leur expression en O' (sur la surface moyenne). Ainsi, par dérivation de (3), et multiplication scalaire des deux membres par e_i^0 , on a, après transformation

$$\sqrt{g_{ii}} = \sqrt{g_{ii}^0} \cdot (1 + t/R_i)$$

On déduit les composantes du tenseur métrique fondamental :

$$g_{ii} = g_{ii}^0 (1 + t/R_i)^2$$

Il arrive, parfois que compte tenu du rapport des dimensions de la coque, ($t/R \ll 1$), on se contente de l'approximation suivante :

$$g_{ii} = g_{ii}^0 \cdot (1 + 2t/R_i)$$

Ces grandeurs interviennent dans la dérivée covariante des tenseurs et on les rencontre, essentiellement, dans l'expression du tenseur des déformations.

3 ELASTICITE APPLIQUEE AUX COQUES DE REVOLUTION

Les coques minces sont caractérisées par un rapport épaisseur sur rayon de courbure (h/R) très petit. De ce fait, les contraintes qui agissent dans la direction de l'épaisseur sont nulles ou négligeables.

$$\text{Donc} \quad \sigma_{it} = 0$$

De même les déformations angulaires (ϵ_{it}) sont nulles.

On sait, par définition, que les composantes covariantes du tenseur des déformations sont :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$$

En conséquence de ce qui précède

$$\nabla_t u_i = - \nabla_i u_t$$

3.1 Déformations et Contraintes

3.1.1 Champ de déplacements

La théorie de l'élasticité nous enseigne qu'une particule élémentaire autour d'un point M d'un corps subit une translation, une rotation et une déformation pure. Cette dernière est négligée car insignifiante. Le déplacement élémentaire de M a, alors, pour expression.

$$\vec{du} = \vec{\omega} \wedge \vec{dp} \quad (11a)$$

où $\vec{\omega} = 1/2 \cdot \vec{\text{rot}} \vec{u}$ est le vecteur rotation et $\vec{\rho}$ le rayon vecteur de composantes (0, t, 0) dans le système de coordonnées intrinsèques.

Intégrons du long de OM, il vient :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}^* + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} - \int_{\vec{om}} \frac{d\vec{\omega}}{dm} \wedge \vec{\rho}$$

L'expression sous le signe de l'intégration se ramène, après transformation, à

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\rho} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \rho} \cdot (d\rho \wedge \vec{\rho}) = 0$$

car le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires $\vec{\rho}$, et $(d\rho)$, est nul. Il reste :

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} \quad (11 b)$$

3.1.2 Composantes du vecteur rotation

De (11 a), après dérivation par rapport à t, il découle,

$$\vec{\omega} \wedge \vec{n} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{e}^i \cdot \nabla_i u_i = -\vec{e}^i \cdot \nabla_i u_i$$

où ∇_i est le symbole de la dérivée covariante de u_i par rapport à t. Après avoir effectué les opérations vectorielles et être revenu aux grandeurs physiques des tenseurs, les composantes physiques du vecteur rotation ont pour expression

$$\omega_\theta = 0 \quad \omega_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{du_t}{dt} - u_\theta \right)$$

3.1.3 Tenseur des déformations

Le vecteur déplacement de M est :

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

Ses composantes covariantes sont :

$$u_i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}} u_i^* - t \cdot \nabla_i u_i$$

Formons la dérivée covariante de u_i par rapport à une coordonnée arbitraire α^j

$$\nabla_j u_i = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}} \cdot \nabla_j u_i^* - t \cdot \nabla_j \nabla_i u_i$$

Après avoir effectué les opérations de dérivation covariante et être retourné aux grandeurs physiques, et sachant que la dérivée ordinaire par rapport à φ est nulle, en raison de la symétrie de révolution, nous trouvons finalement que les composantes du tenseur des déformations se présentent ainsi :

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + t \cdot \omega_\varphi \cotg \theta$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^* + t \cdot \frac{d\omega_\varphi}{d\theta}$$

où

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{du_t}{d\theta} - u_\theta \right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{1}{R} \cdot (u_t + u_\theta \cdot \cotg \theta) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_t \right)$$

La composante tangentielle ($\varepsilon_{\varphi\varphi}$) du tenseur des déformations est nulle en raison de la symétrie de révolution du système.

3.1.4 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes se déduit du tenseur des déformations au moyen de la loi de Hook généralisée. On obtient, ainsi

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi})$$

3.1.5 Efforts normaux dans la coque

Ce sont les forces N_φ et N_θ qui agissent normalement à une section de la coque, respectivement, suivant la tangente τ_φ à une parallèle et la tangente τ_θ à une méridienne. Elles ont pour expression :

$$N_\varphi = \int_s \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \tau_\varphi \cdot ds$$

$$N_\theta = \int_s \sigma_{\theta\theta} \cdot \tau_\theta \cdot ds \quad (14)$$

Dans le cas d'une coque sphérique

$$\tau_\theta \cdot ds = R \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot dt \quad \text{et} \quad \tau_\varphi \cdot ds = R \cdot d\theta \cdot dt$$

Remplaçons $\sigma_{\varphi\varphi}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ par leur expression et exécutons les intégrales (14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_{\varphi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\varphi\varphi}^0 + \nu \epsilon_{\theta\theta}^0) \\ n_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta\theta}^0 + \nu \epsilon_{\varphi\varphi}^0) \end{aligned} \quad (15)$$

n_{φ} et n_{θ} sont les efforts normaux, par unité de longueur, de parallèle et de méridienne.

3.1.6 Moments de flexion dans une coque

Les composantes du moment des forces de contraintes agissant en un point M de la coque sont, par définition

$$\begin{aligned} M_{\varphi} &= \int_S t \cdot \sigma_{\theta\theta} \cdot \tau_{\theta} \cdot ds \\ M_{\theta} &= - \int_S t \cdot \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \tau_{\varphi} \cdot ds \end{aligned}$$

Remplaçons $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{φ} et τ_{θ} par leur expression et intégrons par rapport à t ($-h/2 < t < h/2$).

Les composantes du moment, par unité de longueur, autour de la parallèle et de la méridienne sont, respectivement, dans le cas d'une coque sphérique :

$$\begin{aligned} m_{\varphi} &= \frac{D}{R} \cdot \left(\frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} + \nu \cdot \omega_{\varphi} \cdot \cotg \theta \right) \\ m_{\theta} &= - \frac{D}{R} \left(\omega_{\varphi} \cdot \cotg \theta + \nu \cdot \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} \right) \end{aligned}$$

avec

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D est la rigidité de la coque à la flexion.

3.1.7 Effort tranchant

On démontre, par des considérations énergétiques, que l'effort tranchant, par unité de longueur de parallèle est

$$Q = \frac{1}{R \cdot \sin \theta} \cdot [m_{\theta} \cdot \cos \theta + \frac{d}{d\theta} (m_{\varphi} \cdot \sin \theta)] \quad (17)$$

3.2 Equations d'équilibre

Supposons la coque soumise à une force extérieure répartie d'intensité p par unité de surface. Il est, alors, aisé de déduire les équations d'équilibre par application du théorème du minimum de l'énergie potentielle. Il en résulte les équations suivantes :

$$(n_{\varphi} + n_{\theta}) \sin \theta - \frac{d}{d\theta} (Q \cdot \sin \theta) = p_1 \cdot R \cdot \sin \theta \quad (18a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \cdot \sin \theta) - Q \cdot \sin \theta = p_{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \quad (18b)$$

p_1 et p_{θ} sont les composantes normale et tangentielle, suivant une méridienne, à la surface de la coque, de la force par unité de surface.

Ce système d'équations, dont les fonctions inconnues n_{φ} , n_{θ} et Q peuvent s'exprimer en fonction des déplacements u_{θ} et u_1 , définit complètement le comportement de la coque.

3.2.1 Théorie de la membrane

Si l'appui de la coque est tel que les bords puissent tourner librement, les moments de flexion sont, alors, négligeables et on obtient une bonne approximation en ne considérant que seuls les efforts normaux, ou forces de membrane, sont susceptibles de se développer de façon significative. Dans ce cas, les moments de flexion et les efforts tranchants sont ignorés et les équations (18) s'écrivent :

$$n_{\theta} \cdot \sin \theta + n_{\varphi} \cdot \sin \theta = p_1 \cdot R \cdot \sin \theta \quad (19a)$$

$$n_{\varphi} \cdot \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \cdot \sin \theta) = p_{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \quad (19b)$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles du premier ordre en n_{φ} et n_{θ} , il faut connaître l'expression de p_1 et p_{θ} .

Supposons, cas le plus courant, que la coque soit soumise à une force verticale, son poids propre, de densité p par unité de surface ; la projection de cette force sur les axes de coordonnées intrinsèques donne alors :

$$p_1 = -p \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad p_{\theta} = p \cdot \sin \theta$$

Eliminant n_{φ} entre (19a) et (19b), il vient :

$$\sin \theta \cdot \frac{dn_{\theta}}{d\theta} + 2 \cdot n_{\theta} \cdot \cos \theta = -pR$$

Cette équation admet pour solution générale

$$n_{\theta} = (pR \cdot \cos \theta + A) / \sin^2 \theta$$

n_{θ} doit rester fini au voisinage de $\theta = 0$. Pour cela, il faut que le numérateur s'annule en ce point. Donc,

$$A = -pR$$

L'effort normal à la méridienne par unité de parallèle est, après simplification,

$$n_{\theta} = \frac{-pR}{(1 + \cos \theta)}$$

Pour les angles d'ouverture habituels ($\theta < 90^\circ$), n_{θ} est un effort de compression.

On déduit, sans difficulté, l'expression de n_{φ} . L'équation

(19a), nous donne, par exemple :

$$n_{\varphi} = \frac{-pR}{(1 + \cos \theta)} \cdot (\cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

n_{φ} est un effort de compression qui s'annule pour un angle θ voisin de 52° , pour devenir effort de traction au-delà.

Si la force répartie p était normale à la surface de la coque (pression hydrostatique), nous aurions abouti, par un raisonnement identique, à la répartition suivante des forces de membrane :

$$n_{\varphi} = n_{\theta} = \frac{-pR}{2}$$

3.2.2 Flexion des coques

a) Méthode des inconnues hyperstatiques

Pour l'étude de la flexion des coques on utilise les équations (17). Toutefois, des études détaillées ont montré que la flexion n'est significative qu'au voisinage des bords. Ailleurs les forces de membrane sont prépondérantes. Pour tenir compte de cela et simplifier la résolution du problème, on suppose que la coque est soumise à des forces, équivalentes aux forces de membrane, appliquées sur ses bords, de telle sorte qu'elles produisent le même effet que les forces réellement appliquées. En ignorant le second membre, les équations (17a) et (17b) deviennent :

$$n_{\varphi} \sin \theta + n_{\theta} \sin \theta - \frac{d}{d\theta} (Q \sin \theta) = 0 \quad (19)$$

$$n_{\varphi} \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (n_{\theta} \sin \theta) - Q \sin \theta = 0$$

Ces relations sont satisfaites pour

$$n_{\theta} = Q \cdot \cotg \theta \quad n_{\varphi} = \frac{dQ}{d\theta}$$

Reprenons, par ailleurs, l'expression des déformations sur la surface moyenne de la coque, données par les formules (12).

Dérivons $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 &= -\frac{1}{R} \left(\frac{du_t}{d\theta} - u_{\theta} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{du_{\theta}}{d\theta} + u_t \right) \cotg \theta \\ &\quad - \frac{1}{R} (u_t + u_{\theta} \cotg \theta) \cotg \theta \\ \frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 &= \omega_{\varphi} + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^0 - \varepsilon_{\theta\theta}^0) \cotg \theta \end{aligned}$$

or

$$\frac{d}{d\theta} \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = \frac{1}{Eh} \frac{d}{d\theta} (n_{\varphi} - \nu \cdot n_{\theta}) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{d^2 Q}{d\theta^2} - \nu \cotg \theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} \right)$$

et

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^0 - \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{Eh} \cdot (n_{\varphi} - n_{\theta}) = \frac{1}{Eh} \cdot (Q \cotg \theta - \frac{dQ}{d\theta})$$

Remplaçons $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0$ et $\varepsilon_{\theta\theta}^0$ ainsi que leur dérivée en fonction de l'effort tranchant Q puis ordonnons et simplifions l'écriture ; on obtient l'équation différentielle :

$$-Eh\omega_{\varphi} = \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} - (\cotg^2 \theta - \nu) \cdot Q$$

Par ailleurs, la relation (17) peut s'écrire :

$$RQ = (m_{\varphi} + m_{\theta}) \cotg \theta + \frac{dm_{\varphi}}{d\theta}$$

$$Q = \frac{D}{R^2} \cdot [(1 - \nu) \left(\frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} + \nu \omega_{\varphi} \cotg \theta \right) +$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} + \nu \omega_{\varphi} \cotg \theta \right)]$$

Ordonnons et simplifions l'écriture de cette équation qui devient :

$$\frac{QR^2}{D} = \frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - (\cotg^2 \theta + \nu) \cdot \omega_{\varphi}$$

On obtient, en définitive, le système d'équations :

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} - \cotg^2 \theta \cdot Q = -(Eh\omega_{\varphi} + \nu Q)$$

$$\frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - \cotg^2 \theta \cdot \omega_{\varphi} = (QR^2 + \nu \omega_{\varphi})$$

Négligeons dans les deux équations (20) ν devant $\cotg \theta$. Il reste :

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{dQ}{d\theta} - \cotg^2 \theta \cdot Q = -Eh\omega_{\varphi} \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \omega_{\varphi}}{d\theta^2} + \cotg \theta \cdot \frac{d\omega_{\varphi}}{d\theta} - \cotg^2 \theta \cdot \omega_{\varphi} = \frac{R^2 Q}{D}$$

Ainsi, l'équilibre des coques de révolution sollicitées en flexion s'exprime au moyen de deux équations différentielles, en Q et ω_{φ} , à coefficients variables.

Remarquons qu'au voisinage du sommet ($\theta = 0$), $\cotg \theta$

devient très grand. Or, les expressions contenant $\cotg\theta$ doivent rester finies. Pour cela, il faut que les facteurs de ce terme soient très petits et comme ce sont des fonctions régulières et monotones qui ne doivent pas varier brusquement, ils resteront petits dans le domaine de variation de θ .

Il en résulte que les dérivées de Q et ω_φ d'un certain ordre sont négligeables devant leurs dérivées d'ordre supérieur. Négligeons, alors, Q , ω_φ ainsi que leurs dérivées premières dans les équations précédentes ; le système d'équations d'équilibre se ramène à :

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} = -E h \omega_\varphi \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \omega_\varphi}{d\theta^2} = \frac{R^2}{D} \cdot Q$$

Dérivons deux fois la première équation et remplaçons le second membre par son expression déduite de la deuxième équation ; on obtient une seule équation en Q et une seule en ω_φ , qui s'écrivent :

$$\frac{d^4 Q}{d\theta^4} + 4\lambda^4 \cdot Q = 0 \quad (a)$$

(23)

$$\frac{d^4 \omega}{d\theta^4} + 4\lambda^4 \cdot \omega = 0 \quad (b)$$

où $4\lambda^4 = \frac{EhR^2}{D} = 12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{R^2}{h^2}$

La solution générale de l'équation différentielle (23a) est de la forme :

$$Q = e^{-\lambda\theta} (A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta) + e^{\lambda\theta} (C \cos \lambda\theta + D \sin \lambda\theta) \quad (24)$$

La solution particulière dépend de quatre constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites. On sait, toutefois, des nombreuses études réalisées sur les coques, que les efforts croissent de la clé - ou sommet - de la coque vers les naissances. Aussi, nous ne conserverons dans l'équation (24) que le terme qui croît avec θ .

Posons pour plus de commodité $\theta = \alpha - \psi$, α est l'angle d'ouverture au sommet de la coque. Dans ces conditions, la solution de l'équation d'équilibre peut s'écrire, lorsque la coque ne présente pas d'ouverture au sommet :

$$Q = K \cdot e^{-\lambda\psi} \cdot \sin(\lambda\psi + J)$$

De cette relation, on peut déduire les expressions suivantes :

▼ effort normal suivant une méridienne :

$$n_\theta = Q \cdot \cotg\theta$$

▼ effort normal suivant une parallèle :

$$n_\varphi = \frac{dQ}{d\theta}$$

▼ rotation autour d'une parallèle :

$$\omega_\varphi = \frac{-1}{Eh} \frac{d^2 Q}{d\theta^2}$$

▼ moment de flexion autour d'une parallèle :

$$m_\varphi = \frac{D^2}{EhR} \frac{d^3 Q}{d\theta^3}$$

▼ moment de flexion autour d'une méridienne :

$$m_\theta = -\nu m_\varphi$$

La composante verticale du déplacement du bord appuyé d'une coque est toujours nulle. La composante horizontale du déplacement a pour expression :

$$\delta = u_t \cdot \sin \theta + u_\theta \cdot \cos \theta$$

ou

$$\delta = R \cdot \epsilon_{\varphi\varphi} \sin \theta$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{Eh} (n_\varphi - \nu n_\theta) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{dQ}{d\theta} - \nu Q \cdot \cotg\theta \right)$$

Négligeons $Q \cdot \cotg\theta$, le déplacement horizontal est en définitive :

$$\delta = \frac{R}{Eh} \sin \theta \frac{dQ}{d\theta}$$

Remarquons, au passage, que δ , qui croît comme le rapport R/h , peut devenir très grand ; c'est pour cela que l'on prend la précaution de raidir le bord des coques au moyen d'anneaux circulaires rigides. Il est possible, dès lors, de résoudre un certain nombre de problèmes à l'aide des formules précédentes.

Considérons, par exemple, le cas d'une coque soumise à une pression normale d'intensité p par unité de surface, et dont le bord est encastré. Pour résoudre le problème, on considère le système équivalent constitué par la coque envisagée soumise à la résultante des forces de membrane supposées appliquées sur le contour de son bord appuyé (Figure 2).

Pour réaliser l'équilibre, on superpose une force de réaction horizontale $H\alpha$ et un moment d'encastrement $M\alpha$ dont l'action combinée annule le déplacement et la rotation des appuis.

Exprimons, tout d'abord, $M\alpha$ et $H\alpha$ en fonction des données. Pour cela, écrivons la solution de l'équation

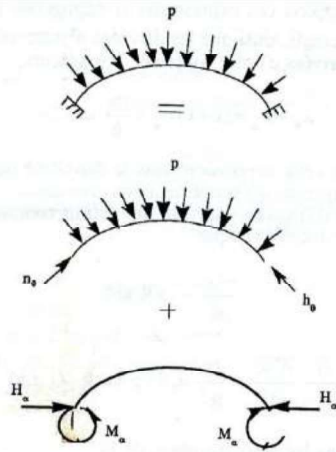


Figure 2

d'équilibre en fonction de ψ :

$$Q = e^{-\lambda\psi} (A \cos \lambda\psi + B \sin \lambda\psi)$$

Le problème se ramène à la détermination des constantes A et B en fonction des conditions aux limites. Dérivons trois fois cette relation,

$$\frac{dQ}{d\psi} = -\lambda Q + \lambda e^{-\lambda\psi} (-A \sin \lambda\psi + B \cos \lambda\psi)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\psi^2} = -\lambda \frac{dQ}{d\psi} - \lambda^2 e^{-\lambda\psi}$$

$$[A (-\sin \lambda\psi + \cos \lambda\psi) + B (\cos \lambda\psi + \sin \lambda\psi)]$$

$$\frac{d^3 Q}{d\psi^3} = -\lambda \frac{d^2 Q}{d\psi^2} + 2\lambda^3 e^{-\lambda\psi} (A \cos \lambda\psi + B \sin \lambda\psi)$$

La rotation étant nulle aux appuis, nous avons :

$$\omega_\psi = \frac{-1}{Eh} \frac{d^2 Q}{d\psi^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2 Q}{d\psi^2} \right)_{\psi=0} = 0$$

$$\text{d'où} \quad B = 0$$

Par ailleurs

$$Q)_{\psi=0} = -H\alpha \cdot \sin \alpha = A$$

$$m_\psi)_{\psi=0} = D \cdot \frac{d\omega_\psi}{d\psi} = -\frac{D}{R} \cdot \frac{d^3 Q}{d\psi^3} = \frac{2D}{EhR} A$$

comme aux appuis $m_\psi)_{\psi=0} = M\alpha$ il vient :

$$A = -H\alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{Eh}{2D} RM\alpha$$

Pour avoir l'expression de A, on doit écrire que la force $H\alpha$ produit un déplacement horizontal ($\delta\alpha$) sur le bord qui annule le déplacement (δ^0) produit par les forces de membrane.

Or,

$$\delta = u_\theta \cos \theta + u_r \sin \theta = R \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin \theta$$

comme :

$$n_\varphi = n_\theta = -\frac{pR}{2}$$

$$\delta)_{\psi=0} = \frac{pR^2(1-\nu)}{2Eh} \sin \alpha = \delta^0$$

$$\delta\alpha = \frac{-dQ)_{\psi=0}}{d\psi} \frac{R}{Eh} \sin \alpha = \frac{A\lambda R}{Eh} \sin \alpha = \delta^0$$

d'où

$$A = -\frac{pR(1-\nu)}{2 \cdot \lambda}$$

En définitive :

$$H\alpha = \frac{(1-\nu)pR}{2 \cdot \lambda \sin \alpha}$$

$$M\alpha = \frac{(1-\nu)pR^2}{4\lambda^2} = \frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{(1-\nu)}{3(1+\nu)}}$$

L'équation d'équilibre prend, en fin de compte, la forme :

$$Q = \frac{(1-\nu)}{2\lambda} p R e^{-\lambda\psi} \cos \lambda\psi$$

Comme

$$m_\psi = \frac{D}{R} \frac{d\omega_\psi}{d\psi} = -\frac{D}{EhR} \frac{d^3 Q}{d\psi^3}$$

on a, après transformation,

$$m_\psi = \frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{(1-\nu)}{3(1+\nu)}} e^{-\lambda\psi} \cos \lambda\psi$$

On peut, à l'aide de ces formules, calculer les efforts en tout point de la coque.

NOTE : La méthode exposée ci-dessus, bien que fondamentalement différente dans sa démarche, aboutit à des résultats identiques à ceux de la littérature spécialisée, notamment ceux figurant dans l'excellent traité "Théorie des Plaques et Coques" de S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger.

▲ **Application** : Soit une coque de révolution sphérique soumise à une pression constante p , avec les données suivantes :

Rayon	$R = 40 \text{ m}$
Epaisseur	$h = 12 \text{ cm}$
Angle d'ouverture	$\alpha = 30^\circ$
Module d'Young	$E = 3,5 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$
Coef. de Poisson	$\nu = 0,2$
Pression	$p = 1,25 \text{ Kg/cm}^2$

Les résultats du calcul figurent en annexe I.

b) Méthode des déplacements
(Méthode proposée par l'auteur)

Reprenons l'expression des composantes du tenseur des déformations d'une coque sphérique,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} (u_\theta \cotg \theta + u_r) + \frac{1}{R} \omega_\varphi \cotg \theta$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right) + \frac{1}{R} \frac{d\omega_\varphi}{d\theta}$$

avec

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{du_r}{d\theta} - u_\theta \right)$$

Négligeons les termes contenant $\cotg \theta$ comme très petits, ainsi que :

$$\frac{1}{R^2} \frac{du_\theta}{d\theta} \text{ devant } \frac{1}{R} \frac{du_\theta}{d\theta}, \text{ il reste}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{R}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right) - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u_r}{d\theta^2}$$

Les composantes du tenseur des contraintes déduit de la loi de Hooke ont pour expressions :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} \left[(1+\nu) u_r + \nu \frac{du_\theta}{d\theta} - \frac{\nu}{R^2} \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{du_\theta}{d\theta} + (1+\nu) u_r - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} \right]$$

Supposons la coque soumise à une force verticale constante p par unité de surface (son poids propre). L'application du théorème du minimum de l'énergie potentielle conduit aux deux équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{d}{d\theta} (n_\theta \sin \theta) = -p R \sin^2 \theta$$

$$\frac{D}{R^4} \frac{d^2}{d\theta^2} (\sin \theta \frac{d^2 \mu_r}{d\theta^2}) + \frac{(n_\varphi + n_\theta) \sin \theta}{R} = -p R \sin \theta \cos \theta$$

Développons ces expressions et négligeons les termes contenant $\cotg \theta$, ainsi que les dérivées d'ordre inférieur devant les dérivées d'ordre supérieur. Par ailleurs,

$$n_\theta + n_\varphi = (1+\nu) n_\theta + \frac{Eh}{R} u_r$$

Portons cette expression dans la deuxième équation ci-dessus et opérons les simplifications convenues ; on obtient le système d'équations suivant qui définit complètement le comportement de la coque :

$$\frac{dn_\theta}{d\theta} = -p R \sin \theta$$

$$\frac{D}{R^4} \frac{d^4 u_r}{d\theta^4} + \frac{Eh}{R^2} u_r = -p \cos \theta - (1+\nu) \frac{n_\theta}{R}$$

Divisons les deux membres de la seconde équation par D/R^4 et posons :

$$4\lambda^4 = \frac{EhR^2}{D} = 12 (1-\nu^2) \frac{R^2}{h^2}$$

Intégrons la première équation, ci-dessus ; on a :

$$n_\theta = p R \cos \theta + K$$

On détermine la constante K en remarquant qu'au sommet de la coque ($\theta = 0$), n_θ est égale à la force de membrane. Donc :

$$n_{\theta=0} = p R + K = -pR/2$$

d'où :

$$K = -3 p R/2$$

Portons cette expression dans la seconde équation d'équilibre ; on obtient alors :

$$\frac{d^4 u_r}{d\theta^4} + 4\lambda^4 u_r = -(2+\nu) \frac{p R^4}{D} \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{p R^4}{D} (1+\nu)$$

La solution de cette équation différentielle détermine complètement le problème. Il sera aisé, à partir de là, de calculer l'expression des efforts en chaque point de la coque.

Si la coque est soumise à une force normale à sa surface, les équations précédentes se simplifient quelque peu. On a alors :

$$K = -p R/2$$

$$u_r^{IV} + 4\lambda^4 u_r = -\frac{1-\nu}{2} \frac{p R^4}{D}$$

La solution de cette équation différentielle est, dans le cas d'une coque sans ouverture au sommet :

$$u_r = e^{-\lambda\psi} (A \cos \lambda\psi + B \sin \lambda\psi) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{p R^4}{4\lambda^4 D}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les condi-

tions aux limites. Si la coque est encastrée les constantes ont pour valeur :

$$A = B = \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{pR}{4\lambda^4 D}$$

Il en découle, alors :

$$m_\psi = -\frac{pRh}{4} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3(1+\nu)}} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q = -\frac{(1-\nu)}{2\lambda} p R e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

On voit que sur le bord encastré ($\psi = 0$) les valeurs du moment de flexion et de l'effort tranchant coïncident exactement avec celles données par la méthode des inconnues hyperstatiques.

On établit aisément l'expression des autres efforts.

$$m_\theta = -\nu m_\psi \quad n_\theta = -\frac{pR}{2} \quad n_\psi = \nu n_\theta + \frac{Eh}{R} u_t$$

▲ **Application :** On donne en annexe II les résultats du calcul de la coque traitée dans le premier cas.

Cette méthode s'applique, également, au calcul des coques de révolution de formes diverses telles que la courbure, l'épaisseur et la charge soient variables. Pour cela, on considère un élément de la coque d'ouverture δ tel que $\delta \ll \alpha$ et on assimile cet élément à une petite portion de coque sphérique. On résoud le problème en assemblant ces éléments à l'aide de techniques appropriées. Il suffira, alors, de déterminer les déplacements et rotations aux points d'assemblage pour pouvoir y reconstituer les efforts.

Le problème a été résolu par l'auteur et a donné lieu au programme de calcul XSHELL ⑥

ANNEXE I :

I Méthode des inconnues hyperstatiques

ψ°	M_ψ	M_θ	Q	N_θ	N_ψ
0	0,71	-0,14	0,84	-26,46	-6,46
3	0,07	-0,01	0,08	-25,15	-17,86
6	-0,05	0,01	-0,06	-24,88	-25,19
9	-0,01	0,00	-0,02	-24,96	-25,62
12	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-25,10
15	0,00	-0,00	0,00	-25,01	-24,97
18	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-24,99
21	-0,00	0,00	-0,00	-25,00	-25,00
24	-0,00	0,00	-0,00	-25,00	-25,00
27	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-25,00
30	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-25,00

ANNEXE II :

II Méthode des déplacements

ψ°	M_ψ	M_θ	Q	N_θ	N_ψ
0	0,71	-0,14	0,84	-25,00	-5,00
3	-0,13	-0,03	0,08	-25,00	-17,70
6	-0,08	0,02	-0,06	-25,00	-25,31
9	-0,00	0,00	-0,02	-25,00	-25,66
12	0,01	-0,00	0,00	-25,00	-25,10
15	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-24,96
18	-0,00	0,00	0,00	-25,00	-24,99
21	-0,00	0,00	-0,00	-25,00	-25,00
24	-0,00	0,00	-0,00	-25,00	-25,00
27	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-25,00
30	0,00	-0,00	0,00	-25,00	-25,00

NB : Les moments sont exprimés en tm/m et les forces en t/m.

◆ ◆ ◆ ⑥ ◆ ◆ ◆

